Prof. Dr. Alfred Toth

Die Semiotik und die natürlichen Zahlen

1. Nach Bense (1975, S. 171) kann „die Explikation des Axiomensystems der natürlichen Zahlen als verallgemeinerte Nachfolgerelation im Sinne des semiotischen Repräsentationsschemas der universalkategorisch fundierten und geordneten triadischen Zeichenrelation gewonnen“ werden. Ferner hatte Bense (1983, S. 192 ff.) den Zusammenhang zwischen den Peano-Axiomen, den Peirceschen „Axioms of Numbers“ und der generativ-semiotischen Relation der „Primzeichen“ hergestellt (vgl. ausserdem Bense 1980).

Wenn man sich nur an die obigen Angaben hält, müsste man denken, die Semiotik sei jener Teil der Mathematik, der ausschliesslich auf natürlichen Zahlen beruhe, d.h. die Arithmetik und die Zahlentheorie sowie einzelne Teile weiterer Gebiete, und der grosse Unterschied zwischen Mathematik und Semiotik beruhe einzig darauf, dass der Zeichenbegriff zusätzlich zum Zahlenwert (M) noch Bedeutung ($M \rightarrow O$) sowie Sinn ($O \rightarrow I$) enthalte. Semiotik, so besehen, wäre jenes Teilgebiet der Mathematik, in dem mit Sinn und Bedeutung gerechnet wird. Gemäss der Einführung der Primzeichen durch Bense (1980) wäre dies demnach nur bei den positiven ganzen Zahlen möglich.

2. Nach Bense (1979, S. 67) gilt ferner: „Das vollständige Zeichen ist eine triadische Relation von wiederum drei relationalen Gliedern, deren erstes, das Mittel, monadisch (einstellig), deren zweites, der Objektbezug, dyadisch (zweistellig), und deren drittes, der Interpretant, triadisch (dreistellig) gebaut ist“. Die Peircesche Zeichenrelation kann demnach wie folgt dargestellt werden:

$ZR = (M, (M \rightarrow O), (M \rightarrow O \rightarrow I)),$

d.h. M ist als 1-stellige Relation monadisch. O ist hingegen als 2-stellige Relation dyadisch, d.h. wegen ($M \rightarrow O$), und I ist ferner als 3-stellige Relation triadisch, d.h. wegen ($M \rightarrow O \rightarrow I$). Allerdings ergibt sich hier ein erstes Problem, denn die Triade, d.h. genauer: die triadische Partialrelation ($M \rightarrow O \rightarrow I$) ist ein verstecktes Konkatenat aus einer monadischen und einer dyadischen Relation:

$(M \to O \to I) = (M) \circ (M \to O)$.

Das bedeutet aber, dass einen nichts daran hindert, in dem Ausdruck

$$ZR = (M, (M \to O), (M \to O \to I))$$

das O wiederum als Abkürzung für die dyadische Relation $(M \to O)$ aufzufassen und in der 3. Partialrelation einzusetzen:

$$ZR = (M, (M \to O), (M \to (M \to O) \to I)),$$

wiederholtes Einsetzen ergibt z.B.

$$ZR = (M, (M \to O), (M \to (M \to (M \to (M \to (M \to O)))) \to I)) ...,$$

d.h. Benses Zeichendefinition führt automatisch zu einem unendlichen Regress wegen der dyadischen Partialrelation der triadischen Partialrelation, d.h. wir bekommen hier Partialrelationen von Partialrelationen von Partialrelationen ... .

Wenn wir aber anderseits anhand von Kap. 1 die Korrespondenz der Primzeichen und der Peanozahlen nehmen und schreiben

$$ZR = (M, (M \to O), (M \to O \to I)) = (n, \sigma(n), \sigma\sigma(n)),$$

dann bekommen wir eine falsche Gleichung, denn es ist zwar bei den Peanozahlen

$1 + 1 = 2$
$1 + 2 = 3$,

aber ist aber nicht bei den Primzeichen

$M + M = O$
$M + O = I$,

und zwar nicht deshalb nicht, weil die Primzeichen quantitativ-qualitative Zahlen sind und somit nicht mit den Gesetzen der natürlichen Zahlen berechnet werden können, sondern weil die „Peirce-Zahlen“, wie ich sie einmal genannt habe, relationale Zahlen sind, die Peano-Zahlen aber nicht.

3. Wir kommen also zum vorläufigen Schluss, dass entweder die Äquivalenz der Peirce-Zahlen (Benses Primzeichen) mit den Peano-Zahlen (Kap. 1) oder die verschachtelte Relation der Definition der Zeichenrelation durch Peirce (Kap. 2) falsch ist, denn beide Konzeptionen sind miteinander nicht vereinbar. Es gibt aber noch ein weiteres Problem, nämlich die unterschiedliche arithmetische Behandlung der Triaden und Trichotomien, denn es gilt zwar für die Triaden (TdPZ bedeute triadischen Peirce-Zahlen) die transitive Inklusionsrelation aus Kap. 2:

TdPZ = $(1 < 2 < 3) = (1 \subset 2 \subset 3)$,

für die Trichotomien bzw. die trichotomischen Peirce-Zahlen (TtPZ) gilt jedoch

TtPZ) $(1 \leq 2 \leq 3) = (1 \subseteq 2 \subseteq 3)$

(vgl. z.B. Walther 1979, S. 79).

Würde nämlich die irreflexive und symmetrische Relation < anstatt der Halbordnung nicht nur für Triaden, sondern auch für Trichotomien angewandt, so käme man auf ein semiotisches System von nur zwei Zeichenrelationen:

(3.1 2.2 1.3)
(3.3 2.2 1.1),

wobei sogar streng genommen nur die letztere in der folgenden Ordnung

(1.1 2.2 3.3)

statthaft wäre. Aber selbst in diesem Fall müsste noch festgelegt wären, wie die vermittelnde Ordnung (VO) zwischen den triadischen und den trichotomischen Peirce-Zahlen zu sein hat. Theoretisch gibt es folgende Kombinationen

TdPZ:	1	<	2	<	3
VO	=		=		=
TtPZ:	1	<	2	<	3

TdPZ:	1	<	2	<	3
VO	<		<		<
TtPZ:	2	<	3	<	?

Wie man sieht, entfällt die letzte VO, da die Peanozahl 4 in der Menge der Peirce-Zahlen nicht definiert ist. Wir bräuchten also entweder

TdPZ:	1	<	2	<	3
VO	<		<		=
TtPZ:	2	<	3	<	3

oder

TdPZ:	1	<	2	<	3
VO	<		<		>
TtPZ:	2	<	3	<	2

bzw.

TdPZ:	1	<	2	<	3
VO	<		<		>
TtPZ:	2	<	3	<	1

Kurz gesagt, wenn sowohl TdPZ als auch TtPZ die Ordnung < aufweisen, dann muss VO entweder (===), (==<), (=<<), (<<<), (=<=) (<==), (<<=), (<=<), sein. Es ist also so, dass dann, wenn die Ordnung < zwar für TdPZ, nicht jedoch auch für TtPZ gilt, wir eines dritten semiotischen Zahlensystems, der Vemittlungszahlen zwischen TdPZ und TtPZ, bedürfen.

4. Gelten jedoch nebeneinander die beiden arithmetischen Ordnungen

TdPZ: $(<, \mathbb{N})$

TtPZ: $(\leq, \mathbb{N})$,

dann stellen die beiden Peirce-Zahlen folgende Ausschnitte aus $\mathbb{N}$ dar:

TdPZ = 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...
TtPZ = 1, 1/2, 2/3, ¾, 4/5, 5/6, ...,

so dass die Peano-Axiome also für TdPZ, nicht aber für TtPZ gelten.

Gilt jedoch stattdessen die transitive Mengeninklusion $\subseteq$, dann ist diese, wie man nun erkennt, mit TtPZ, nicht aber, wie bereits oben bemerkt, wie TdPZ, vereinbar. In diesem Fall aber muss das Zeichen neu definiert werden, und zwar wie folgt:

ZR = (a.b c.d e.f)

mit $a \leq c \leq e$ (TdPZ) und $b \leq d \leq f$ (TtPZ). Das ist aber dasselbe wie

$ZR_{\leq} = ((a \leq b) \leq (c \leq d) \leq (e \leq g))$,

d.h. das Zeichen ist nun eine total geordnete lineare Ordnung, d.h. eine Kette (vgl. z.B. Erné 1982, S. 46) von Peirce-Zahlen, die nun natürlich nicht mehr in triadische einerseits und trichotomische anderseits aufgeteilt werden müssen, sondern wirklich eine Teilmenge der Natürlichen Zahlen sind. Durch $ZR_{\leq}$ werden ferner genau die 10 Zeichenklassen erzeugt, welche als die Peirceschen Zeichenklassen bekannt sind, und nicht alle $3^3 = 27$ theoretisch möglichen.

Wenn wir $\mathbb{P}$ für Peirce-Zahlen schreiben, dann gilt also

$\mathbb{P} \in \mathbb{N}$.

Im Rahmen von $ZR_{\leq}$ gelten dann natürlich alle für $(\mathbb{N}, \leq)$ geltenden Rechenoperationen (vgl. Landau 1930, Kap. 1, § 3).

Bibliographie

Bense, Max, Die Unwahrscheinlichkeit des Ästhetischen. Baden-Baden 1979
Bense, Max, Die Einführung der Primzeichen: In: Ars Semeiotica 3/3, 1980, S. 287-294
Bense, Max, Das Universum der Zeichen. Baden-Baden 1983
Erné, Marcel, Einführung in die Ordnungstheorie. Mannheim 1982
Landau, Edmund, Grundlagen der Analysis. Göttingen 1930
Walther, Elisabeth, Allgemeine Zeichenlehre. 2. Auf. Stuttgart 1979

31.10.2009